1. P-T3-Strecke mit P-Regler

Abb. 1.1 zeigt die Regelstrecke für eine Heizplatte wie sie beispielsweise in der chemischen Industrie zur Konstanthaltung der Temperatur in einer Flüssigkeit genutzt wird.

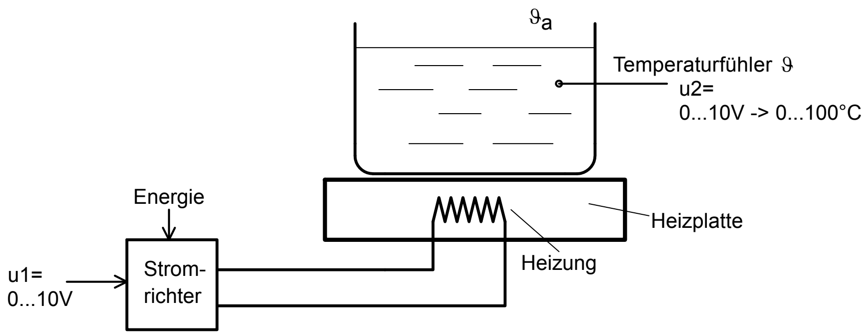

Abb. 1.1: Regelstrecke einer Heizplatte

Die Strecke besitzt mehrere Energiespeicher, welche im Prinzip hintereinander geschaltet sind. Die elektrische Energie heizt zunächst die eigentliche Heizplatte auf. Die Wärme geht über auf den Flüssigkeitsbehälter und schließlich auf die Flüssigkeit selber. Vereinfacht dargestellt besteht die Strecke aus mindestens drei Teilstrecken mit P-T1-Verhalten, dem entspricht P-T3-Verhalten.

Im folgenden soll das Verhalten des geschlossenen Regelkreises mit einem reinen P-Regler zur stufenlosen Temperaturregelung untersucht werden. Abb. 1.2 zeigt das zugehörige Blockschaltbild.

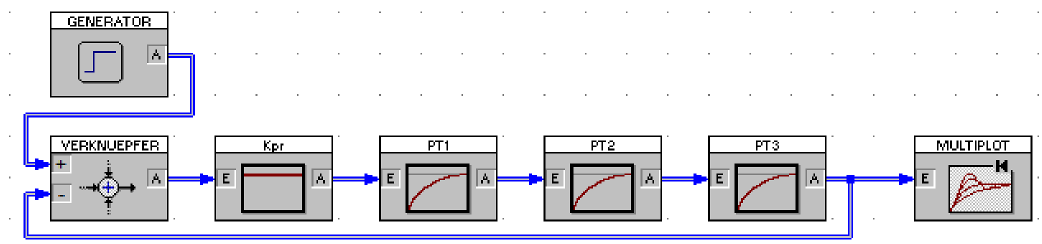

Abb. 1.2: Blockschaltbild P-T3-Strecke mit P-Regler

In einem Beispiel sollen folgende Streckenparameter gegeben sein:

$K_{PS1}=3$; $T_{1S}=1s$
$K_{PS2}=2$; $T_{2S}=5s$
$K_{PS3}=1$; $T_{3S}=20s$

Die Sprungantwort soll für die Reglerverstärkungen K_{PR} = 1; 2,5; 5,25 und 7 ermittelt werden.

Abb. 1.3 zeigen die Ergebnisse für einen Sprung der Führungsgröße von 0 auf 1V.

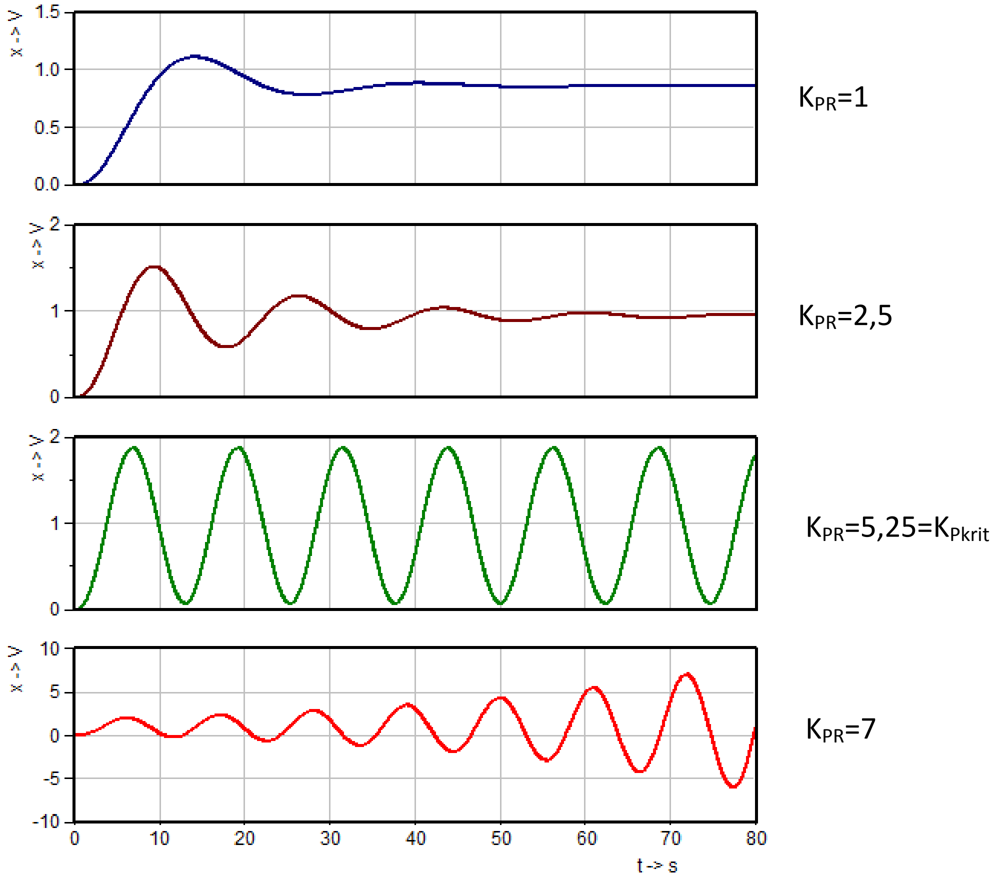

Abb. 1.3: Sprungantwort P-T3-Strecke mit P-Regler

Schlussfolgerungen:

- Wie bei allen Strecken mit Ausgleich entsteht mit einem P-Regler eine bleibende Regelabweicheichung, welche umso geringer ist je größer K_{PR} gewählt wird.

- Das System neigt zum Schwingen. Die Schwingung ist umso größer, je größer K_{PR} gewählt wird.

- Bei einer bestimmten kritischen Einstellung von $K_{PR}=K_{Pkrit}$ entsteht eine Dauerschwingung mit konstanter Amplitude.

- Wird die Reglervertärkung über K_{Pkrit} hinaus erhöht, wird die Amplitude der Schwingung immer größer. Das System ist instabil und kann u.U. zerstört werden.

2. Stabilitätskriterium nach Nyquist[1]

In dem Beispiel des vorigen Artikels führt das rückgekoppelte System bei einer bestimmten Frequenz und einer bestimmten Reglerverstärkung K_{Pkrit} eine Dauerschwingung mit konstanter Amplitude aus. Der Grund liegt darin, dass bei einer bestimmten Frequenz ω_e (die sogenannte Eigenfrequenz) sowohl die Phasenbedingung als auch die Amplitudenbedingung erfüllt sind. Die Phasenbedingung besagt, dass die Phasenverschiebung zwischen Ein- und Ausgangsspannung 0° betragen muss. Die Amplitudenbedingung ist erfüllt, wenn bei dieser Frequenz die Verstärkung gleich 1 ist.

Betrachtet man das System nach Abb. 1.2 indem man die Rückkopplung entfernt (offener Regelkreis), so liegt eine Reihenschaltung aus einem P-Glied mit drei nachfolgenden P-T1-Gliedern vor. Für eine sinusförmige Eingangsspannung an diesem System verursacht der P-Regler für beliebige Frequenzen keine Phasenverschiebung. Mit wachsender Frequenz verursachen die einzelnen P-T1-Glieder jeweils eine Phasenverschiebung bis zu -90°. Die einzelnen Phasenverschiebungen addieren sich also maximal bis zu -270° bei hohen Frequenzen. Daraus folgt: Es gibt eine Frequenz ω_e, bei welcher die Phasenverschiebung -180° beträgt. Über die Rückkopplung gelangt diese Ausgangsspannung an den invertierenden Eingang des Verknüpfers zur Differenzbildung. Der invertierende Eingang entspricht einer weiteren Phasenverschiebung von -180°. Die Phasenverschiebung beträgt dann -360° oder 0° und somit ist die <u>Phasenbedingung</u> erfüllt.

Mit der Reglerverstärkung lässt sich die Amplitude der Ausgangsspannung verändern ohne die Phasenverschiebung zu verändern. Bei einer bestimmten Verstärkung K_{Pkrit} ist die Ausgangsspannung so groß wie die Eingangsspannung. Die Verstärkung ist 1 und damit ist die <u>Amplitudenbedingung</u> ebenfalls erfüllt. Das rückgekoppelte System führt eine ungedämpfte Schwingung aus.

Allgemein gilt:

Der komplexe Frequenzgang des Reglers sei $\underline{F}_R$ und der Frequenzgang der Strecke $\underline{F}_S$. Der Frequenzgang des offenen Regelkreises ist dann

$$\underline{F_0} = \underline{F_R} \cdot \underline{F_S} = F_R \cdot F_S \cdot e^{j(\varphi_r + \varphi_S)} = F_0 \cdot e^{j\varphi_0}$$

Wenn die Phasenverschiebung von $\underline{F_0}$ bei einer Frequenz ω_e -180° beträgt und der Betrag der Verstärkung F_0 bei dieser Frequenz >=1 ist, ist das System bei geschlossenem Regelkreis instabil.

K_{Pkrit} ist die Verstärkung des P-Reglers, bei welcher das System eine Dauerschwingung mit konstanter Amplitude ausführt. Dann ist der Betrag von F_0 gleich 1.

[1] Harry Nyquist (* 7. Februar 1889 in Nilsby, Schweden; † 4. April 1976 in Harlingen, Texas) war ein schwedisch-amerikanischer Ingenieur.

3. Stabilitätsuntersuchung am Bode-Diagramm

Sind die Kennwerte der Strecke bekannt, lassen sich die Werte für ω_e und K_{Pkrit} mit Hilfe des Bode-Diagramms von $\underline{F}_0$ ermitteln.

Hinweise zur Konstruktion des Bode-Diagramms für unser Beispiel aus Kapitel 1 (siehe Abb. 3.1!):

Für die Reglerverstärkung wird K_{PR}=1 gewählt.

dann ist: $\underline{F}_0 = \underline{F}_R \cdot \underline{F}_S = 1 \cdot \underline{F}_S = \underline{F}_S$

Das Bode-Diagramm für $\underline{F}_0 = \underline{F}_S$ ist also die Reihenschaltung von drei P-T1-Gliedern mit folgenden Kennwerten:

$K_{PS1} = 3$ mit $T_{1S} = 1s \rightarrow \frac{K_{Ps1}}{[dB]} = 20 \cdot \log\, 3 = 9{,}54dB$ und $log\frac{1}{T_{1S}} = log1 = 0$

$K_{PS2} = 2$ mit $T_{2S} = 5s \rightarrow \frac{K_{Ps2}}{[dB]} = 20 \cdot \log\, 2 = 6dB$ und $log\frac{1}{T_{2S}} = log\frac{1}{5} = -0{,}7$

$K_{PS1} = 1$ mit $T_{3S} = 20s \rightarrow \frac{K_{Ps3}}{[dB]} = 20 \cdot \log\, 1 = 0dB$ und $log\frac{1}{T_{3S}} = log\frac{1}{20} = -1{,}3$

Für die Frequenzgang ganz allgemein:

$$\underline{F}_S = \underline{F}_{S1} \cdot \underline{F}_{2S} \cdot \underline{F}_{S3} = F_{S1} \cdot e^{j\varphi 1} \cdot F_{S2} \cdot e^{j\varphi 2} \cdot F_{S3} \cdot e^{j\varphi 3} = F_{S1} \cdot F_{S2} \cdot F_{S3} \cdot e^{j(\varphi 1+\varphi 2+\varphi 3)}$$

Die Werte für den Amplitudengang werden im logarithmischen Maßstab in dB eingetragen. Daher geht die Multiplikation der einzelnen Verstärkungen in einer Addition der dB-Werte über.

$$\frac{F_S}{[dB]} = 20 \cdot \log(F_{S1} \cdot F_{S2} \cdot F_{S3}) = 20 \cdot logF_{S1} + 20 \cdot logF_{S2} + 20 \cdot logF_{S3} = \frac{F_{S1}}{[dB]} + \frac{F_{S2}}{[dB]} + \frac{F_{S3}}{[dB]}$$

Der Amplitudengang des Bode-Diagramms lässt sich idealerweise durch drei Geraden annähern:

- Für Frequenzen unterhalb von $\frac{1}{T_{3S}}$ durch eine Gerade im Abstand $\frac{K_{PS}}{[dB]} = \frac{K_{PS1}}{[dB]} + \frac{K_{PS2}}{[dB]} + \frac{K_{PS3}}{[dB]}$.
- Für Frequenzen von $\frac{1}{T_{3S}}$ bis $\frac{1}{T_{2S}}$ durch eine Gerade, welche mit -20dB/Dekade abfällt.
- Für Frequenzen von $\frac{1}{T_{2S}}$ bis $\frac{1}{T_{1S}}$ durch eine Gerade, welche mit -40dB/Dekade abfällt.
- Für Frequenzen oberhalb von $\frac{1}{T_{1S}}$ durch eine Gerade, welche mit -60dB/Dekade abfällt.

Der ideale Phasengang für Frequenzen unterhalb von $\frac{1}{T_{3S}}$ ist 0°, für Frequenzen von $\frac{1}{T_{3S}}$ bis $\frac{1}{T_{2S}}$ -90°, für Frequenzen von $\frac{1}{T_{2S}}$ bis $\frac{1}{T_{1S}}$ -180° und für Frequenzen oberhalb $\frac{1}{T_{1S}}$ -270°.

Der Phasengang lässt sich durch eine Gerade annähern, welche von 0° auf -270° abfällt.

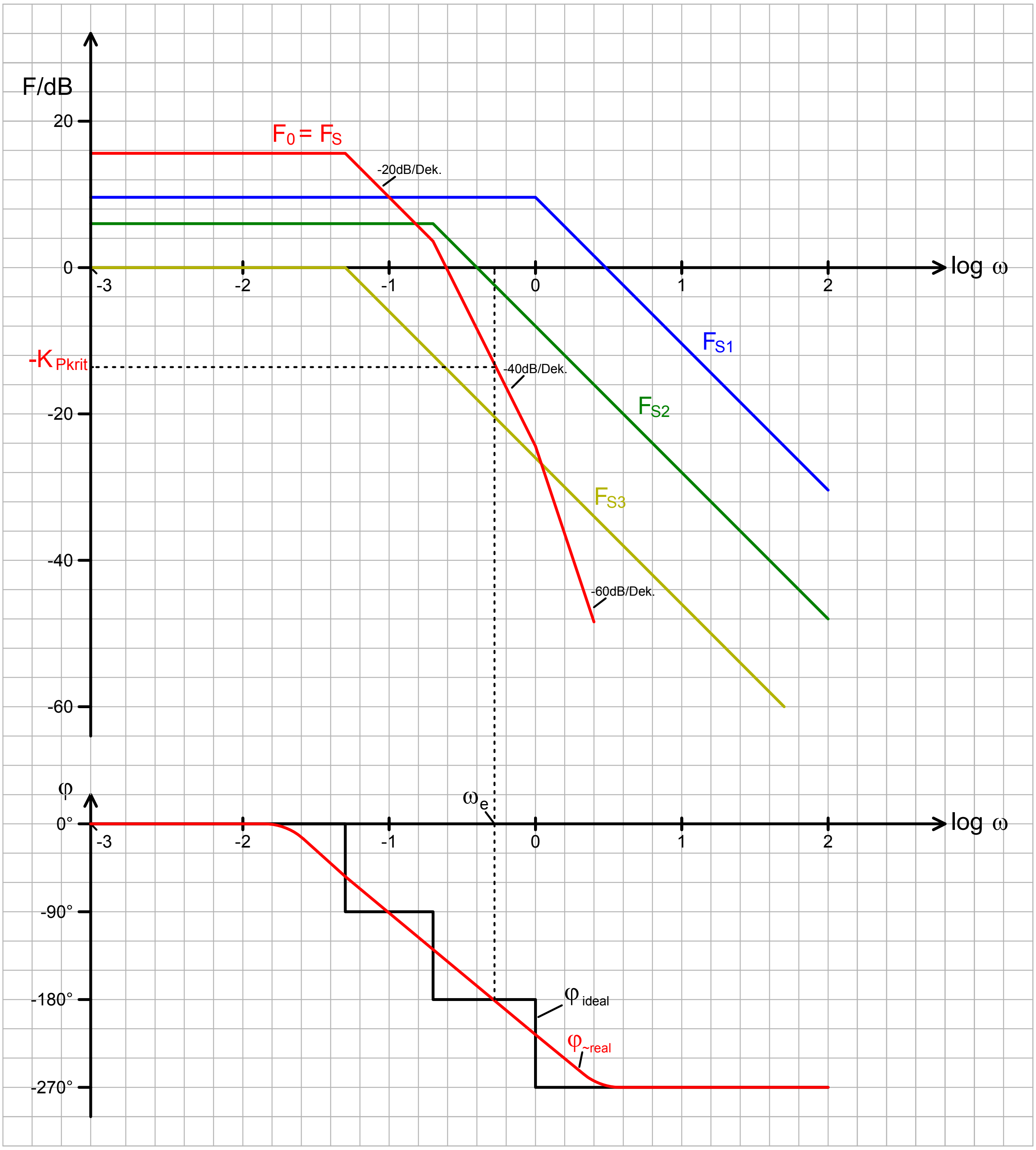

Abb. 3.1: Bode-Diagramm P-T3-Strecke

Im Rahmen der Zeichengenauigkeit kann man bei dem Phasenwinkel von -180° ω_e ablesen: $log\omega_e = -0{,}28 \rightarrow \omega_e = 10^{-0{,}28} \cdot s^{-1} = 0{,}525 \cdot s^{-1}$ und die Periodendauer $T_e = \frac{2\pi}{\omega_e} \approx 12s$.

Die Verstärkung bei dieser Frequenz ist -13,6dB (entspricht $F_{0(\omega_e)} = 10^{\frac{-13{,}6}{20}} \approx 0{,}2$) und damit kleiner als 1, weshalb das System stabil ist. Bei einer Reglerverstärkung von $\frac{1}{0{,}2} = 5$ wäre die Schleifenverstärkung gleich 1 und das System instabil.

Vergleichen Sie bitte die Ergebnisse mit den Messungen aus Kapitel 1!