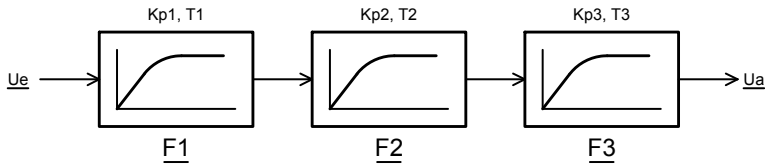


1. Der Frequenzgang

Das P-T3-Verhalten ergibt sich aus der Reihenschaltung von drei P-T1-Regelkreisgliedern.

Bild 1.1:



Für den Frequenzgang gilt ganz allgemein:

$$\underline{F} = \underline{F1} \cdot \underline{F2} \cdot \underline{F3}$$

$$\text{mit } \underline{F1} = \frac{K_{p1}}{1 + j\omega T1}, \quad \underline{F2} = \frac{K_{p2}}{1 + j\omega T2} \quad \text{und} \quad \underline{F3} = \frac{K_{p3}}{1 + j\omega T3}$$

$$\underline{F} = \underline{F1} \cdot \underline{F2} \cdot \underline{F3} = \frac{K_{p1} \cdot K_{p2} \cdot K_{p3}}{(1 + j\omega T1) \cdot (1 + j\omega T2) \cdot (1 + j\omega T3)} = \frac{K_p}{(1 + j\omega T1) \cdot (1 + j\omega T2) \cdot (1 + j\omega T3)}$$

$$\underline{F} = \frac{K_p}{(1 + j\omega T1 + j\omega T2 + j^2 \omega^2 T1 \cdot T2) \cdot (1 + j\omega T3)}$$

$$\underline{F} = \frac{K_p}{(1 + j\omega T1 + j\omega T2 + j^2 \omega^2 T1 \cdot T2 + j\omega T3 + j^2 \omega^2 T1 \cdot T3 + j^2 \omega^2 T2 \cdot T3 + j^3 \omega^3 T1 \cdot T3 \cdot T3)}$$

$$\underline{F} = \frac{K_p}{1 + j\omega(T1 + T2 + T3) + j^2 \omega^2 (T1 \cdot T2 + T1 \cdot T3 + T2 \cdot T3) + j^3 \omega^3 T1 \cdot T3 \cdot T3}$$

mit

$$T1^* = T1 + T2 + T3, \quad T2^{*2} = T1 \cdot T2 + T1 \cdot T3 + T2 \cdot T3 \quad \text{und} \quad T3^{*3} = T1 \cdot T2 \cdot T3$$

ergibt sich:

$$\underline{F} = \frac{K_p}{1 + j\omega T1^* + j^2 \omega^2 T2^{*2} + j^3 \omega^3 T3^{*3}}$$

Formel 1.1

und

$$\underline{F} = \frac{K_p}{(1 - \omega^2 T2^{*2}) + j\omega(T1^* - \omega^2 T3^{*3})}$$

Formel 1.2

	Regelungstechnik	© Udo John
	Regelstrecken mit P-T3-Verhalten	Seite 2 von 6

In Formel 1.2 können Realanteil und Imaginäranteil des Nenners der Wert 0 annehmen.

Für $\omega_1^2 = \frac{1}{T2^{*2}}$ wird er Realanteil 0.

Dann gilt

$$\underline{F_1} = \frac{K_P}{j\omega_1 \cdot (T1^* - \omega_1^2 T3^{*3})} = F_1 \cdot e^{j\varphi_1}$$

Der Betrag der Verstärkung ist $F_1 = \frac{K_P}{\omega_1 \cdot (T1^* - \omega_1^2 T3^{*3})}$ und die Phasenverschiebung $\varphi_1 = -90^\circ$.

Für $\omega_2^2 = \frac{T1^*}{T3^{*3}}$ wird er Imaginäranteil 0.

Dann gilt

$$\underline{F_2} = \frac{K_P}{1 - \omega_2^2 T2^{*2}} = F_2 \cdot e^{j\varphi_2}$$

Der Betrag der Verstärkung ist $F_2 = \frac{K_P}{1 - \omega_2^2 T2^{*2}}$ und die Phasenverschiebung $\varphi_2 = -180^\circ$.

Rechenbeispiel:

Für eine PT3-Strecke mit $K_P=1$ und $T1=T2=T3=1s$ ist:

$$T1^* = T1 + T2 + T3 = 3s$$

$$T2^{*2} = T1 \cdot T2 + T1 \cdot T3 + T2 \cdot T3 = 3s^2$$

$$T3^{*3} = T1 \cdot T2 \cdot T3 = 1s^3$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{1}{3s^2}} = 0,5773s^{-1} \quad \text{und} \quad F_1 = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot (3 - \frac{1}{3} \cdot 1)} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{8}{3}} = \frac{\sqrt{3} \cdot 3}{8} = 0,6495 = -3,748dB$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{T1^*}{T3^{*3}}} = \sqrt{3}s^{-1} = 1,732s^{-1} \quad \text{und} \quad F_2 = \frac{1}{1 - \omega_2^2 T2^{*2}} = \frac{1}{1 - \frac{T1^*}{T3^{*3}} \cdot T2^{*2}} = \frac{1}{1 - \frac{3}{1} \cdot 3} = \frac{1}{-8} = 0,125 = -18,06dB$$

2. Die Sprungantwort

Die typische Sprungantwort eines nicht schwingungsfähigen P-T2-Systems nach Bild 2.1 zeigt Bild 2.2.

Bild 2.1:

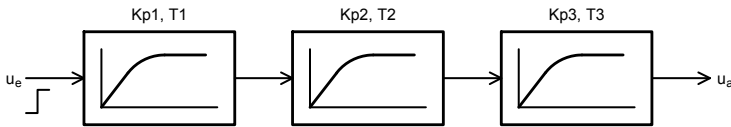
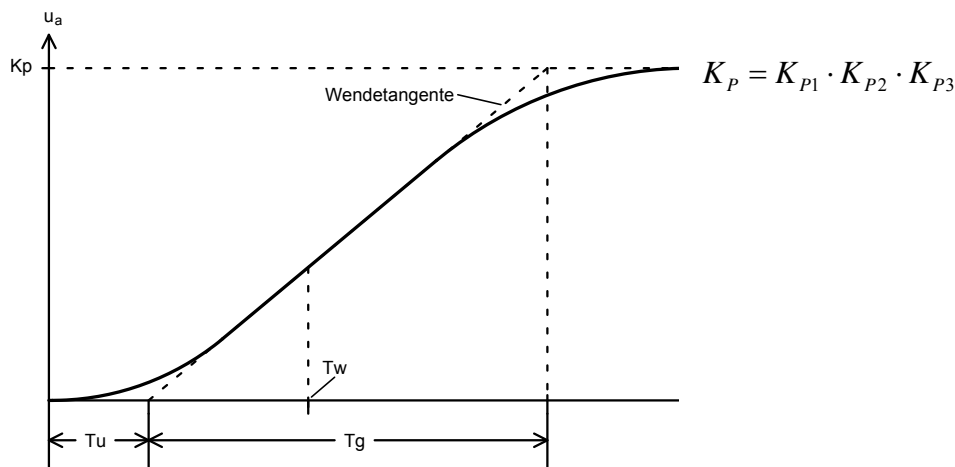


Bild 2.2:



Die Sprungantwort geht typischerweise von einer anfänglich linksgekrümmten Kurve in eine rechtsgekrümmte Kurve über. Sie hat einen Wendepunkt zur Zeit T_w . Zur Bestimmung von Kennwerten zeichnet man eine Tangente zu dieser Zeit an die Kurve (Wendetangente).

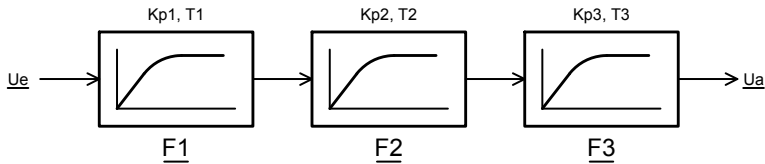
Die Wendetangente schneidet die Zeitachse zur Verzugszeit T_u . Die Zeit, welche vom Ende der Verzugszeit bis zu der Zeit, wo die Wendetangente K_p erreicht, nennt man Ausgleichszeit T_g .

Aus der messtechnisch ermittelten Sprungantwort eines Systems lassen sich K_p , Verzugszeit T_u und Ausgleichszeit T_g bestimmen. Mit Hilfe dieser Parameter kann ein passender Regler ermittelt werden.¹

¹ Einstellregeln nach Chien, Hrones und Reswick (CHR); siehe dort!
P_T3_Verhalten.docx

3. Bode Diagramm

Bild 1.1:



Für die Frequenzgang nach Bild 3.1 gilt ganz allgemein:

$$\underline{F} = \underline{F1} \cdot \underline{F2} \cdot \underline{F3} = |F1| \cdot e^{j\varphi1} \cdot |F2| \cdot e^{j\varphi2} \cdot |F3| \cdot e^{j\varphi3} = |F1| \cdot |F2| \cdot |F3| \cdot e^{j(\varphi1+\varphi2+\varphi3)}$$

Die Werte für den Amplitudengang werden im logarithmischen Maßstab in dB eingetragen.

Deshalb gilt:

$$F_{dB} = 20 \cdot \log(F1 \cdot F2 \cdot F3) = 20 \cdot \log F1 + 20 \cdot \log F2 + 20 \cdot \log F3 = F1_{dB} + F2_{dB} + F3_{dB}$$

Der Amplitudengang des Bode-Diagramms lässt sich durch drei Geraden annähern (für $T1 > T2 > T3$):

- Für Frequenzen unterhalb von $\frac{1}{T1}$ durch eine Gerade im Abstand $K_{P_{dB}} = K_{P1_{dB}} + K_{P2_{dB}} + K_{P3_{dB}}$.
- Für Frequenzen von $\frac{1}{T1}$ bis $\frac{1}{T2}$ durch eine Gerade, welche mit 20dB/Dekade abfällt.
- Für Frequenzen von $\frac{1}{T2}$ bis $\frac{1}{T3}$ durch eine Gerade, welche mit 40dB/Dekade abfällt.
- Für Frequenzen oberhalb von $\frac{1}{T3}$ durch eine Gerade, welche mit 60dB/Dekade abfällt.

Der ideale Phasengang für Frequenzen unterhalb von $\frac{1}{T1}$ ist 0° , für Frequenzen von $\frac{1}{T1}$ bis $\frac{1}{T2}$ -90° , für Frequenzen von $\frac{1}{T2}$ bis $\frac{1}{T3}$ -180° und für Frequenzen oberhalb $\frac{1}{T3}$ -270° .

Beispiel:

Bild 3.2 zeigt das Bode-Diagramm für $K_p=4$, $T_1=5s$, $T_2=2s$ und $T_3=0,5s$.

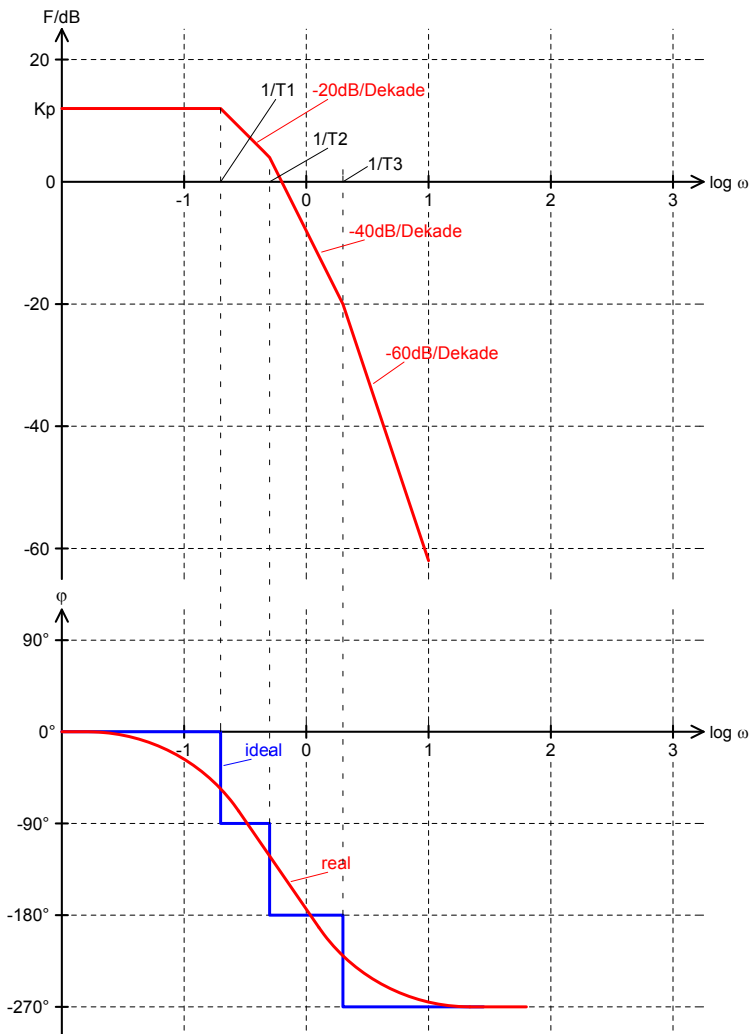
$$K_{p_{dB}} = 20 \cdot \log 4 \approx 12dB$$

$$\log \frac{1}{T_1} = \log 0,2 \approx -0,7$$

$$\log \frac{1}{T_2} = \log 0,5 \approx -0,3$$

$$\log \frac{1}{T_3} = \log 2 \approx 0,3$$

Bild 3.2:



	Regelungstechnik	© Udo John
	Regelstrecken mit P-T3-Verhalten	Seite 6 von 6

Übung 3.1:

- a) Zeichnen Sie das Bode-Diagramm einer P-T3-Strecke für $K_p=2$, $T_1=1s$, $T_2=8s$ und $T_3=20s$!
- b) Bestimmen Sie die Kreisfrequenz, bei welcher $F=1$ wird!
- c) Bestimmen Sie die Kreisfrequenz und die Verstärkung F , bei welcher die Phasenverschiebung -180° wird!
- d) Berechnen Sie die Werte für Aufgabe c) nach den Formeln im 1. Abschnitt und vergleichen Sie diese mit den abgelesenen Werten.