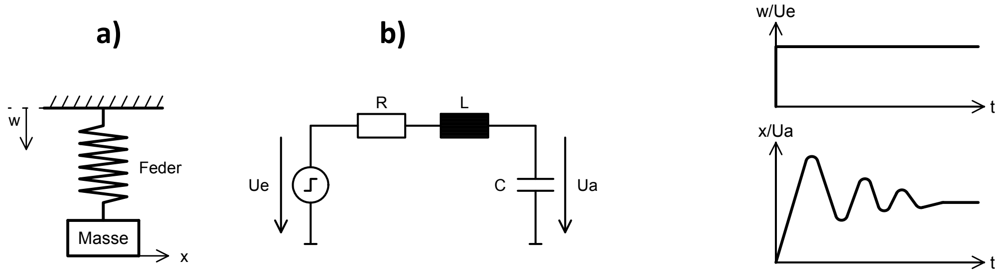
1. Der Frequenzgang

Strecken mit P-T2s-Verhalten sind beispielsweise Feder-Masse Systeme oder RLC-Schwingkreise.

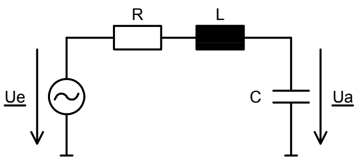
Bild 1.1:



Werden in Bild 1.1a) die Lage w oder die Eingangsspannung Ue in Bild 1.1b) sprunghaft verändert, werden sich die Lage x der Masse bzw. die Ausgangsspannung Ua in einer gedämpften Schwingung dem Endwert annähern.

Der Frequenzgang soll an Hand des RLC-Schwingkreises betrachtet werden.

Bild 1.2:



Für die Schaltung nach Bild 1.2 gilt:

$$\underline{F} = \frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_e} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + j\omega RC + j^2\omega^2 LC}$$

mit $T1^* = R \cdot C$ Formel 1.1

und $T2^* = \sqrt{L \cdot C}$ Formel 1.2

ist $$\boxed{\underline{F} = \frac{1}{1 + j\omega T1^* + j^2\omega^2 T2^{*2}}}$$ Formel 1.3

oder $$\underline{F} = \frac{1}{1 - \omega^2 T2^{*2} + j\omega T1}$$ Formel 1.4

In Formel 1.4 gibt es eine Frequenz ω_0, bei welcher der Realanteil des Nenners 0 wird.

Für diese gilt:

$$\boxed{\omega_0 = \frac{1}{T2^*}} \qquad \text{Formel 1.5}$$

Man bezeichnet ω_0 als <u>Kreisfrequenz des ungedämpften Systems</u>.

Durch Einfügen von ω_0 in Formel 1.2 ergibt sich:

$$\underline{F} = \frac{1}{1-(\frac{\omega}{\omega_0})^2 + j\frac{\omega}{\omega_0}\cdot\frac{T1^*}{T2^*}}$$

Wie bei nicht schwingungsfähigen P-T2-Systemen definiert man die Dämpfung[1]

$$\boxed{D = \frac{T1^*}{2\cdot T2^*}} \qquad \text{Formel 1.6}$$

Dann wird

$$\boxed{\underline{F} = \frac{K_P}{1-(\frac{\omega}{\omega_0})^2 + j\frac{\omega}{\omega_0}\cdot 2\cdot D}} \qquad \text{mit } K_P=1 \qquad \text{Formel 1.7}$$

Daraus folgt:

Bei ω=ω0 ist der Betrag der Verstärkung $F = \frac{K_P}{2\cdot D}$ und die Phasenverschiebung -90°.

Die Kenngrößen eines P-T2s-Systems sind die Verstärkung K_P, die Eigenfrequenz ω_0 und die Dämpfung D.

Setzt man Formel 1.1 und Formel 1.2 in Formel 1.6 ein ergibt sich:

$$D = \frac{R\cdot C}{2\cdot\sqrt{L\cdot C}} = 0{,}5\cdot R\cdot\sqrt{\frac{C}{L}} \qquad \text{Formel 1.8}$$

Für R→0 geht auch die Dämpfung D→0. Daraus folgt, dass bei D=0 und $\omega=\omega_0$ die Verstärkung für F unendlich groß werden kann (Resonanz).

Werden Systeme mit geringer Dämpfung mit der Eigenfrequenz angeregt, führt das zu sehr großen Schwingungsamplituden. Das System kann dadurch zerstört werden!

[1] Vgl. dort Formel 1.7

2. Sprungantwort

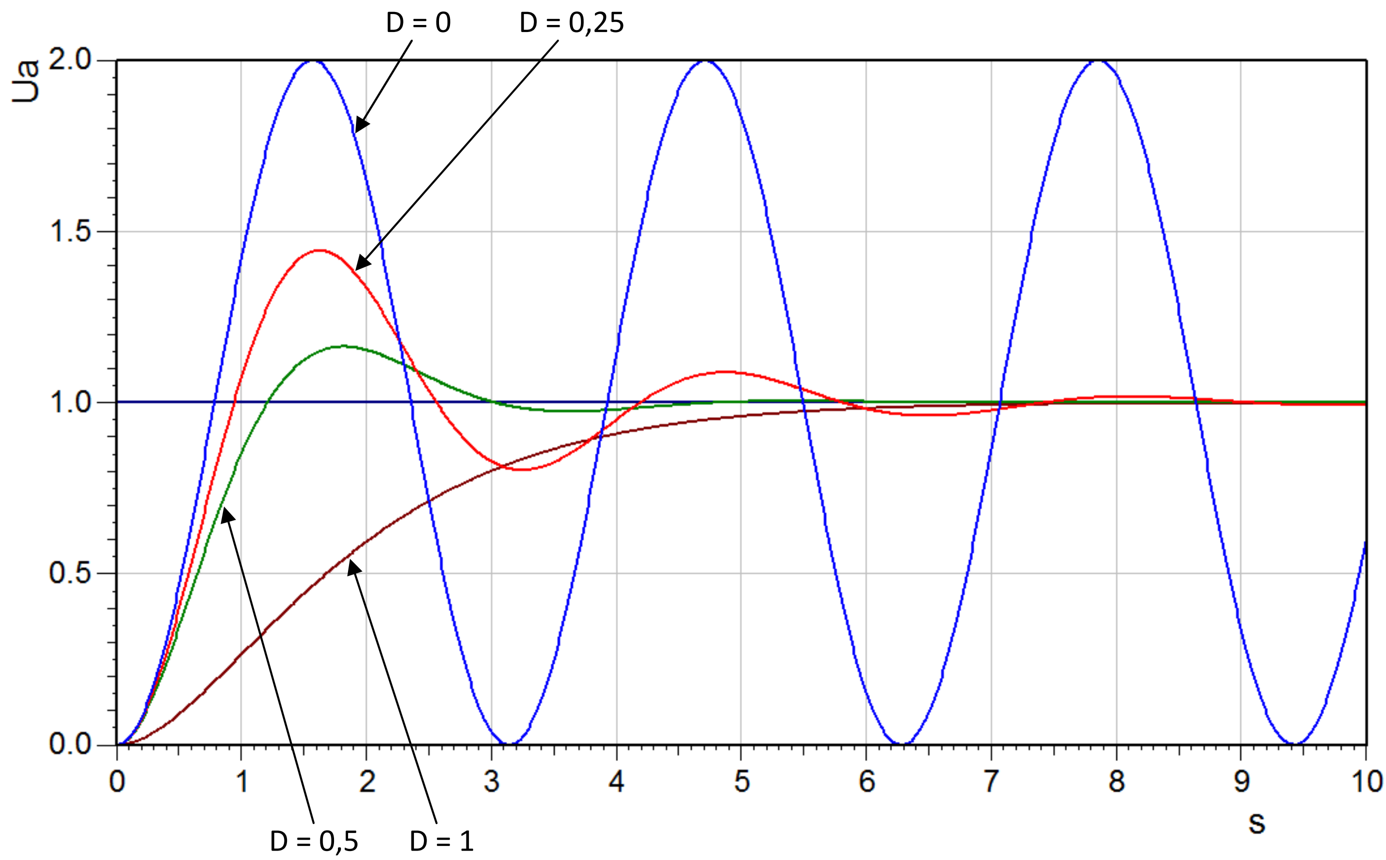
Bei schwingungsfähigen P-T2s-Systemen ist die Dämpfung D kleiner oder gleich 1. Je kleiner die Dämpfung ist, desto größer ist nach einem Eingangssprung die Neigung zum Schwingen. Für D=1 bildet sich keine Überschwingung aus (aperiodischer Verlauf). Bei D=0 entsteht eine ungedämpfte Dauerschwingung (siehe Bild 2.1!)[2].

Der Verlauf lässt sich rechnerisch ermitteln:

$$\boxed{u_a = U_e \cdot K_P [1 - (\cos \omega_e t + \frac{\alpha}{\omega_e} \cdot \sin \omega_e t) \cdot e^{-\alpha t}]}$$

mit $\omega_e = \omega_0 \sqrt{1 - D^2}$ und $\alpha = \frac{T1^*}{2 \cdot T2^{*2}}$

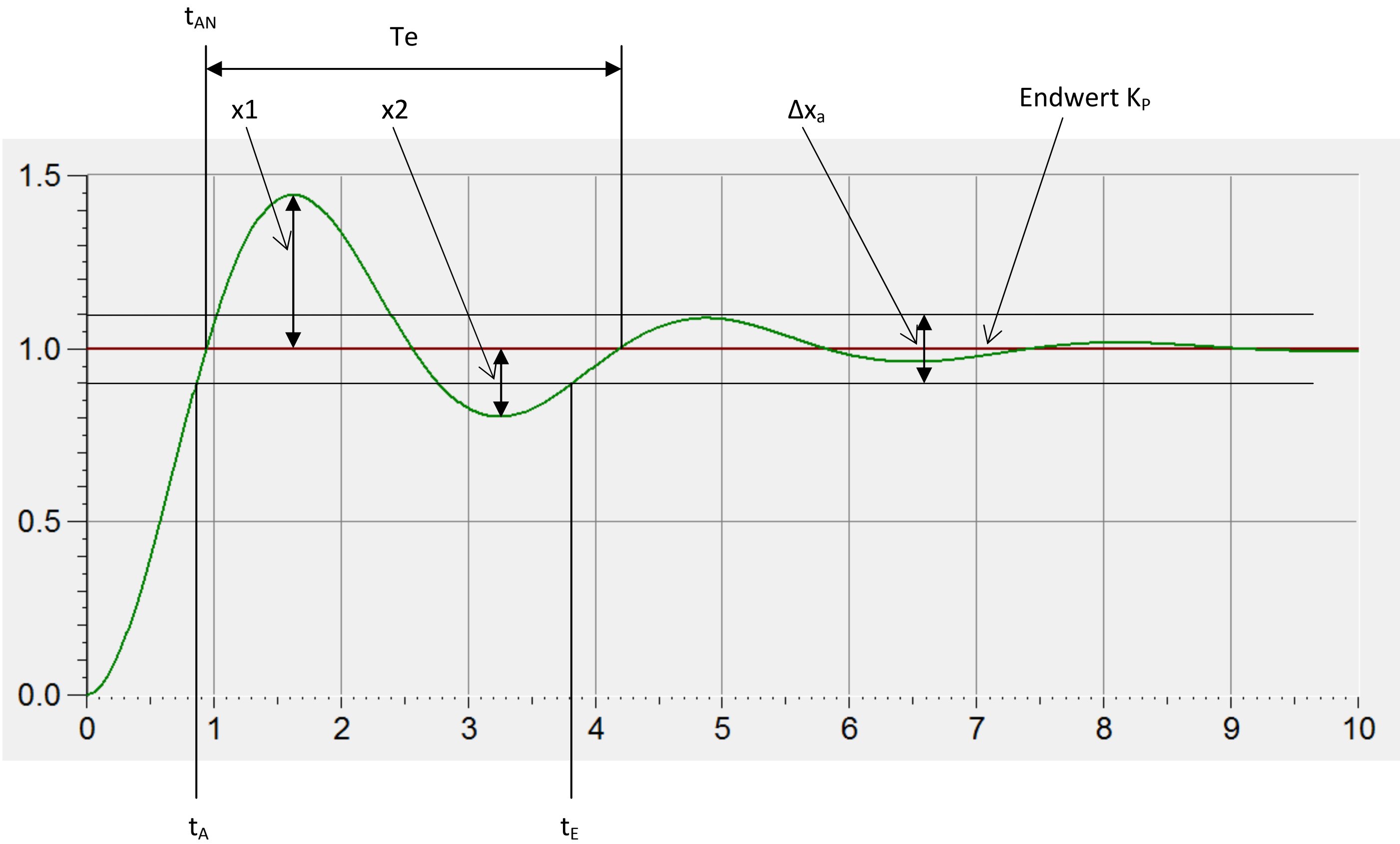
Bild 2.1:



[2] Für D < 0 entsteht eine Schwingung mit anwachsender Amplitude (Instabilität)

Bild 2.2 zeigt die typische Sprungantwort eines schwingungsfähigen Systems mit entsprechenden Kennwerten.

Bild 2.2:



Definitionen:

K_P = Endwert bei einem Eingangssprung von 0 auf 1V

t_{AN} = Anregelzeit; Zeit, nach welcher der Endwert K_P zum erstenmal erreicht wird

T_e = Periodendauer der Schwingung

ω_e = Eigenkreisfrequenz der Schwingung $\omega_E = \frac{2\pi}{T_e}$

Δx_a = Einschwingtoleranz; zulässige obere und untere Toleranzgrenze sind systemabhängig

t_A = Anschwingzeit; Zeit, nach welcher die untere Toleranzgrenze zum erstenmal erreicht wird

t_E = Einschwingzeit; Zeit nach welcher die Toleranzgrenze zum letztenmal über- oder unterschritten wird

x1,x2 = Überschwingweite; die Überschwingweite ist von der Dämpfung des Systems abhängig

Aus der Sprungantwort lassen sich grafisch die Streckenparameter gewinnen.

$$\boxed{D = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\pi}{\ln x1/x2}\right)^2}}}$$

und

$$\boxed{\omega_0 = \frac{\omega_e}{\sqrt{1 - D^2}}}$$

In Bild 2.1 ergeben sich:

x1 = 0,45V

x2 = 0,2V

Daraus folgt:

$$D = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\pi}{\ln 0{,}45/0{,}2}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\pi}{0{,}81}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+15}} = \frac{1}{4} = 0{,}25$$

und:

$$T_e = 4{,}18s - 0{,}93s = 3{,}25s$$

$$\omega_e = \frac{2 \cdot \pi}{3{,}25s} = 1{,}933s^{-1}$$

$$\omega_0 = \frac{1{,}933s^{-1}}{\sqrt{1 - 0{,}25^2}} = \frac{1{,}933s^{-1}}{0{,}968} = 2s^{-1}$$

Außerdem ist $K_P = 1$.

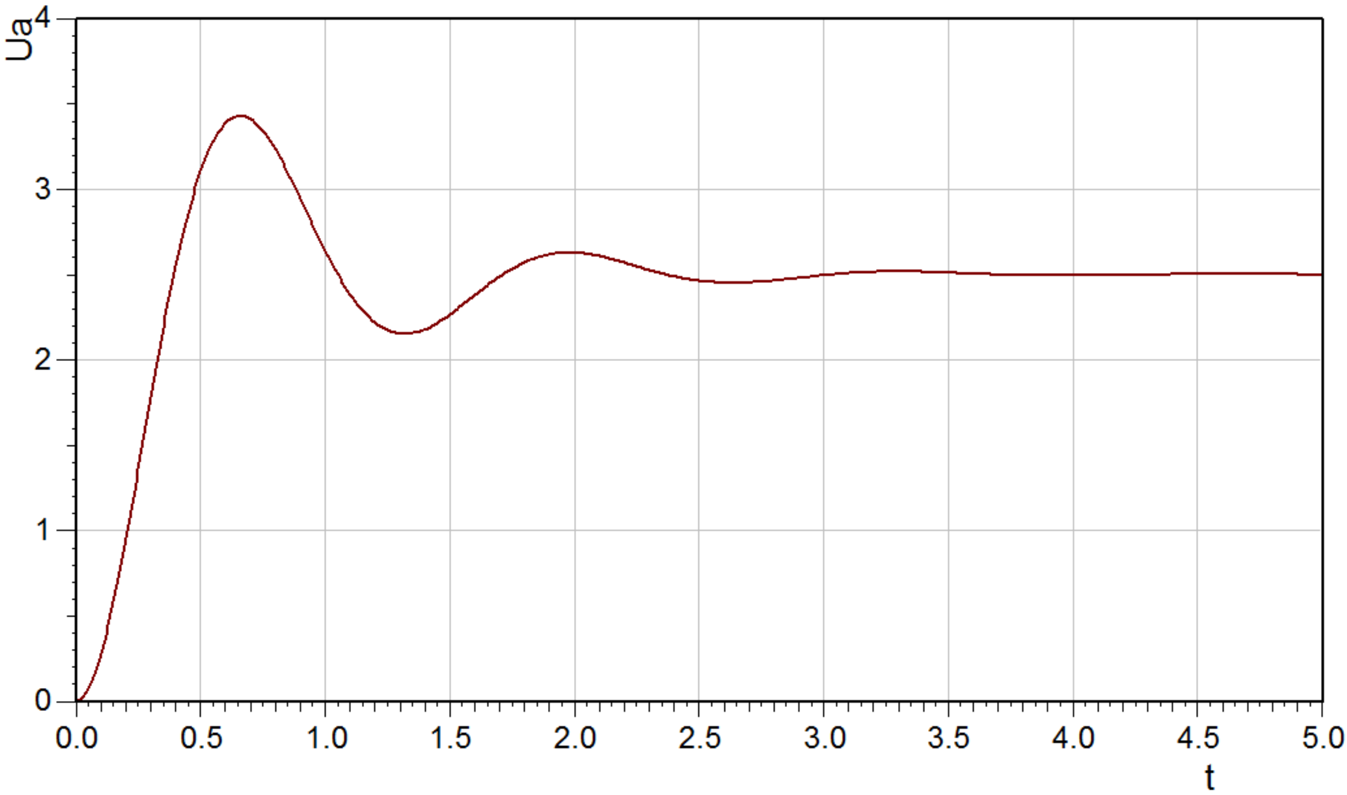
Übung 2.1:

Gegeben ist die Sprungantwort eines P-T2s-Systems nach einem Eingangssprung von 0 auf 1V.

a) Bestimmen Sie die Streckenparameter K_P, ω_0 und D!

b) Ermitteln Sie die Anschwingzeit t_A und Einschwingzeit t_E bei einer Überschwingweite von +/- 10% gegenüber K_P!

c) Bestimmen Sie die Ersatzzeitkonstanten $T1^*$ und $T2^*$! (Vgl. Formeln 1.4 und 1.6!)



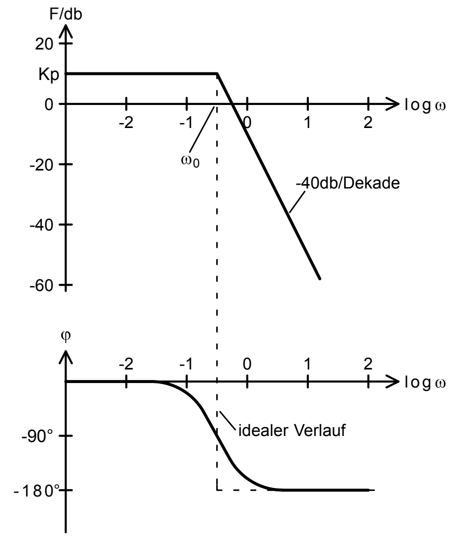
3. Das Bode-Diagramm

Das Bode-Diagramm lässt sich idealerweise durch zwei Geraden annähern:

- Für $\omega < \omega 0$ eine Gerade im Abstand Kp.
- Für $\omega > \omega 0$ eine abfallende Gerade mit -40dB/Dekade.

Der Phasengang geht von 0° nach -180°, Bei ω0 ist die Phasenlage -90°.

Bild 3.1:



Wie im 1. Abschnitt beschrieben kann bei geringer Dämpfung (D→0) und für ω≈ω0 die Verstärkung F sehr groß werden[3]. Die Frequenz, bei welcher die Verstärkung ihren Maximalwert hat, ist die Resonanzfrequenz ω_r.

Die Berechnung erfolgt durch:

$$\boxed{\omega_r = \omega_0 \cdot \sqrt{1 - 2 \cdot D^2}} \qquad \text{für} \quad 0 < D < \frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}707$$

Der Betrag der Verstärkung ist dann:

$$\boxed{F_{(\omega_r)} = \frac{K_P}{2 \cdot D \cdot \sqrt{1 - D^2}}}$$

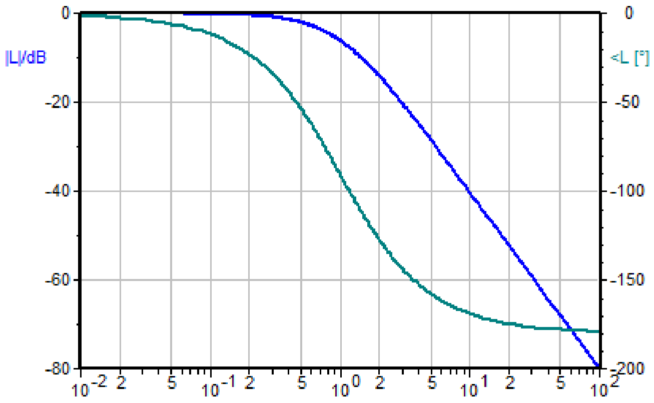
Die Phasenverschiebung bei ω_r ist:

$$\boxed{\varphi_{(\omega_r)} = -\arctan \frac{\sqrt{1 - 2 \cdot D^2}}{D}}$$

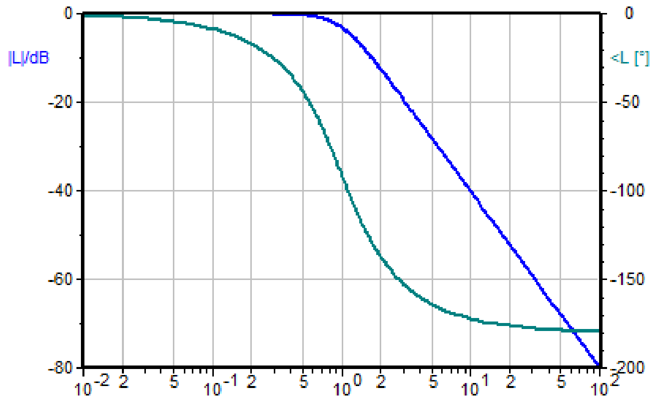
Außerdem hat der Phasengang bei geringerer Dämpfung eine größere Steilheit beim Übergang von 0° auf -180°.
Die folgenden Bilder zeigen die Bode-Diagramme bei verschiedenen Dämpfungen (K_P=1; $\omega 0 = 1s^{-1}$).

[3] Vgl. Formel 1.7

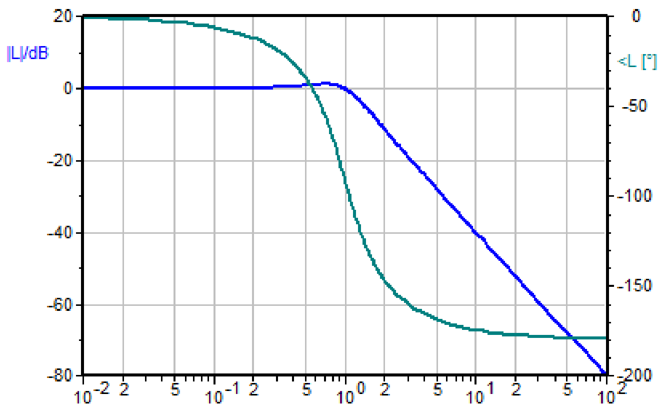
D = 1



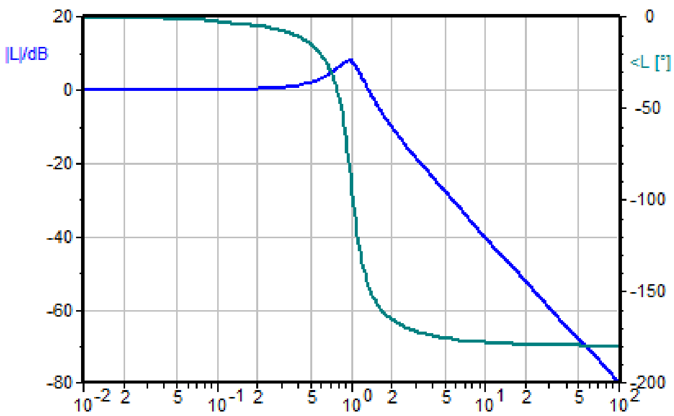
D = 0,707



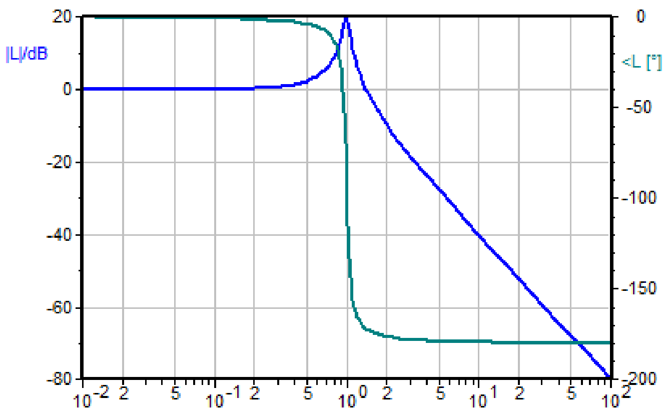
D = 0,5



D = 0,2



D = 0,05



Übung 3.1:

a) Zeichnen Sie das (ideale) Bode-Diagramm für ein P-T2s-System mit $K_P = 5$ und $\omega_0 = 20s^{-1}$!

b) Berechnen Sie die Resonanzfrequenz ω_r und die maximale Verstärkung $F_{(\omega r)}$ bei einer Dämpfung von D = 0,15! Skizzieren Sie näherungsweise den realen Verlauf des Amplitudenganges!