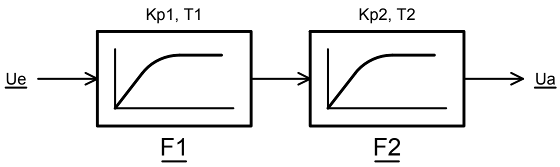
1. Der Frequenzgang

Das P-T2-Verhalten ergibt sich aus der Reihenschaltung von zwei P-T1-Regelkreisgliedern.

Bild 1.1:



Für den Frequenzgang gilt ganz allgemein:

$$\underline{F} = \underline{F1} \cdot \underline{F2}$$

mit $\underline{F1} = \frac{K_{P1}}{1 + j\omega T1}$ und $\underline{F2} = \frac{K_{P2}}{1 + j\omega T2}$

$$\underline{F} = \underline{F1} \cdot \underline{F2} = \frac{K_{P1} \cdot K_{P2}}{(1 + j\omega T1) \cdot (1 + j\omega T2)} = \frac{K_{P1} \cdot K_{P2}}{1 + j\omega(T1 + T2) + j^2\omega^2 T1 \cdot T2}$$

mit den Festlegungen

$K_P = K_{P1} \cdot K_{P2}$ sowie $T1^* = T1 + T2$ und $T2^* = \sqrt{T1 \cdot T2}$

ergibt sich für den gesamten Frequenzgang

$$\boxed{\underline{F} = \frac{K_P}{1 + j\omega T1^* + j^2\omega^2 T2^{*2}}}$$

Formel 1.1

Die obige Gleichung besitzt im Nenner einen negativen Realanteil.

$$\underline{F} = \frac{K_P}{1 - \omega^2 T1 \cdot T2 + j\omega(T1 + T2)}$$

Formel 1.2

Es gibt ein $\omega = \omega_0$ bei welchem der Realanteil des Nenners 0 wird.

Dafür gilt: $\omega_0{}^2 \cdot T1 \cdot T2 = 1$

Man bezeichnet ω_0 als die <u>Kreisfrequenz des ungedämpften Systems</u> oder auch als <u>Eigenkreisfrequenz</u>.

Für diese gilt: $\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{T1 \cdot T2}}}$

Formel 1.3

Bei der Eigenfrequenz ω_0 ist ergibt sich für den Frequenzgang:

$$\underline{F}_{(\omega_0)} = \frac{K_P}{j\omega_0(T1+T2)} = \frac{K_P}{\omega_0(T1+T2)} \cdot e^{-j90°} = F_{(\omega_0)} \cdot e^{-j90°}$$ Formel 1.4

Die Phasenverschiebung bei der Eigenfrequenz ω_0 ist -90°.

Nach Einsetzen von Formel 1.3 in 1.4 ist

$$F_{(\omega_0)} = \frac{K_P}{\frac{T1+T2}{\sqrt{T1 \cdot T2}}} = K_P \cdot \frac{\sqrt{T1 \cdot T2}}{T1+T2}$$ Formel 1.5

Das Verhältnis von K_P zu $F_{(\omega_0)}$ ist ein Maß für den Abfall der Verstärkung bei der Eigenfrequenz gegenüber K_P. Das wird durch die Definition der Dämpfung beschrieben.

Die Dämpfung eines P-T2-Systems wird definiert als

$$\boxed{D = \frac{T1+T2}{2 \cdot \sqrt{T1 \cdot T2}}}$$ Formel 1.6[1]

Der Wert für D ist immer gleich oder größer als 1. Die Dämpfung wird umso größer, je mehr die Zeitkonstanten voneinander abweichen.

In Formel 1.1 wurde definiert: $T1^* = T1+T2$ und $T2^* = \sqrt{T1 \cdot T2}$

Dann wird

$$\boxed{D = \frac{T1^*}{2 \cdot T2^*}}$$ Formel 1.7[2]

Unter Verwendung der Kenngrößen ω_0 und D lässt sich der Frequenzgang auch anders berechnen.

Aus Formel 1.3 ergibt sich:

$$T1 \cdot T2 = \frac{1}{\omega_0^{\,2}}$$ Formel 1.8

und aus Formel 1.6:

$$T1 + T2 = 2 \cdot D \cdot \sqrt{T1 \cdot T2} = 2 \cdot \frac{D}{\omega_0}$$ Formel 1.9

[1] Bei dieser Definition ist D=1, wenn T1 = T2 ist!
[2] Bei schwingungsfähigen P-T2s-Systemen wird D < 1 (siehe dort!)

Nach Einsetzen von Formel 1.8 und 1.9 in Formel 1.2 ist

$$\underline{F} = \frac{K_P}{1-(\frac{\omega}{\omega_0})^2 + j\frac{\omega}{\omega_0}\cdot 2\cdot D} \qquad \text{Formel 1.10}$$

Der Ausdruck $(\frac{\omega}{\omega_0})$ in Formel 1.10 beschreibt die Abweichung der Frequenz von der Eigenfrequenz. Für $\omega = \omega_0$ ist $\underline{F} = \frac{K_P}{j2\cdot D}$.

Der Betrag der Verstärkung bei dieser Frequenz ist $F_{(\omega_0)} = \frac{K_P}{2\cdot D}$ und die Phasenverschiebung ist -90°.

Zusammenfassung:

P-T2-Systeme werden entweder durch die Kennwerte $K_P = K_{P1}\cdot K_{P2}$, T1 und T2 oder durch K_P, ω_0 und D beschrieben. Die Dämpfung D ist bei nicht schwingungsfähigen Systemen immer gleich oder größer als 1.

2. Die Sprungantwort

Die typische Sprungantwort eines nicht schwingungsfähigen P-T2-Systems nach Bild 2.1 zeigt Bild 2.2.

Bild 2.1:

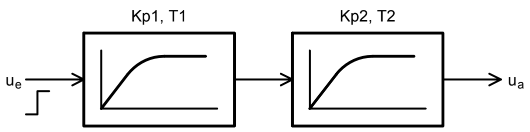
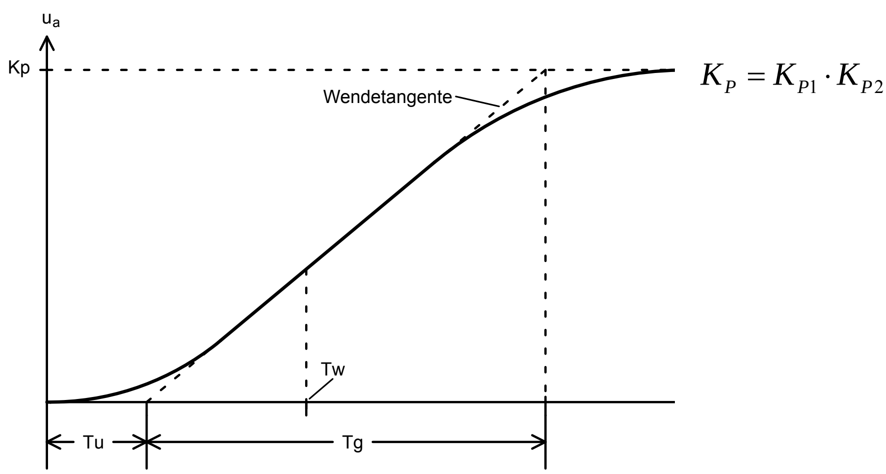


Bild 2.2:



Die Sprungantwort geht typischerweise von einer anfänglich linksgekrümmten Kurve in eine rechtsgekrümmte Kurve über. Sie hat einen Wendepunkt zur Zeit Tw. Zur Bestimmung von Kennwerten zeichnet man eine Tangente zu dieser Zeit an die Kurve (Wendetangente).

Die Wendetangente schneidet die Zeitachse zur Verzugszeit Tu. Die Zeit, welche vom Ende der Verzugszeit bis zu der Zeit, wo die Wendetangente Kp erreicht, nennt man Ausgleichszeit Tg.

Aus der messtechnisch ermittelten Sprungantwort eines Systems lassen sich Kp, Verzugszeit Tu und Ausgleichszeit Tg bestimmen. Mit Hilfe dieser Parameter kann eine passender Regler ermittelt werden.[3]

Bei gegebenen Streckenparametern lassen sich die Wendepunktzeit Tw und der Zeitverlauf der Ausgangsspannung u_a bei einem konstanten Eingangssprung berechnen.

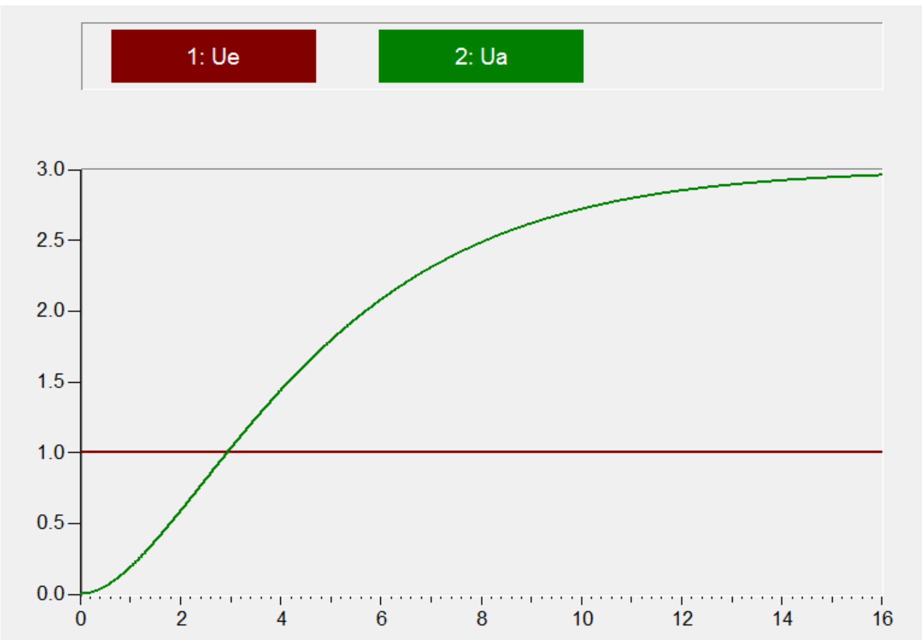
$$u_a = U_e \cdot Kp \cdot \left(1 - \frac{T1}{T1-T2} \cdot e^{-\frac{t}{T1}} + \frac{T2}{T1-T2} \cdot e^{-\frac{t}{T2}}\right)$$

$$T_w = \frac{T1 \cdot T2}{T1-T2} \cdot \ln \frac{T1}{T2}$$

Übung 2.1:

Gegeben ist die Sprungantwort für eine P-T2-System mit T1=2s und T2=3s bei einem Sprung der Eingangsspannung von 0 auf 1V.

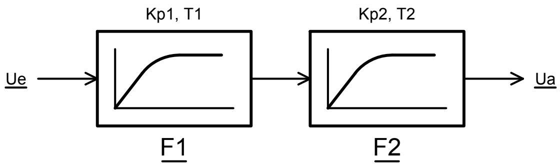
a) Bestimmen Sie Kp und berechnen Sie die Wendepunktzeit Tw!
b) Zeichnen Sie die Wendetangente und bestimmen Sie Tu und Tg!



[3] Einstellregeln nach Chien, Hrones und Reswick (CHR); siehe dort!

3. Das Bode-Diagramm

Bild 3.1:



Für die Frequenzgang nach Bild 3.1 gilt ganz allgemein:

$$\underline{F} = \underline{F1} \cdot \underline{F2} = |F1| \cdot e^{j\varphi 1} \cdot |F2| \cdot e^{j\varphi 2} = |F1| \cdot |F2| \cdot e^{j(\varphi 1 + \varphi 2)}$$

Bei der Reihenschaltung von zwei Regelkreisgliedern ergibt sich der gesamte Frequenzgang indem man die Beträge der einzelnen Verstärkungen multipliziert und die einzelnen Winkel addiert.

Die Werte für den Amplitudengang werden im logarithmischen Maßstab in dB eingetragen. Nach den Logarithmengesetzen gilt, dass der Logarithmus eines Produktes gleich der Summe der Logarithmen der einzelnen Faktoren ist.

$$\log(u \cdot v) = \log u + \log v$$

Deshalb gilt:

$$\boxed{F_{dB} = 20 \cdot \log(F1 \cdot F2) = 20 \cdot \log F1 + 20 \cdot \log F2 = F1_{dB} + F2_{dB}}$$

Das bedeutet:

Der Amplitudengang für ein P-T2-Glied ergibt sich, indem man die Amplitudengänge der einzelnen P-T1-Glieder für jede Frequenz überlagert (addiert).

Beispiel:

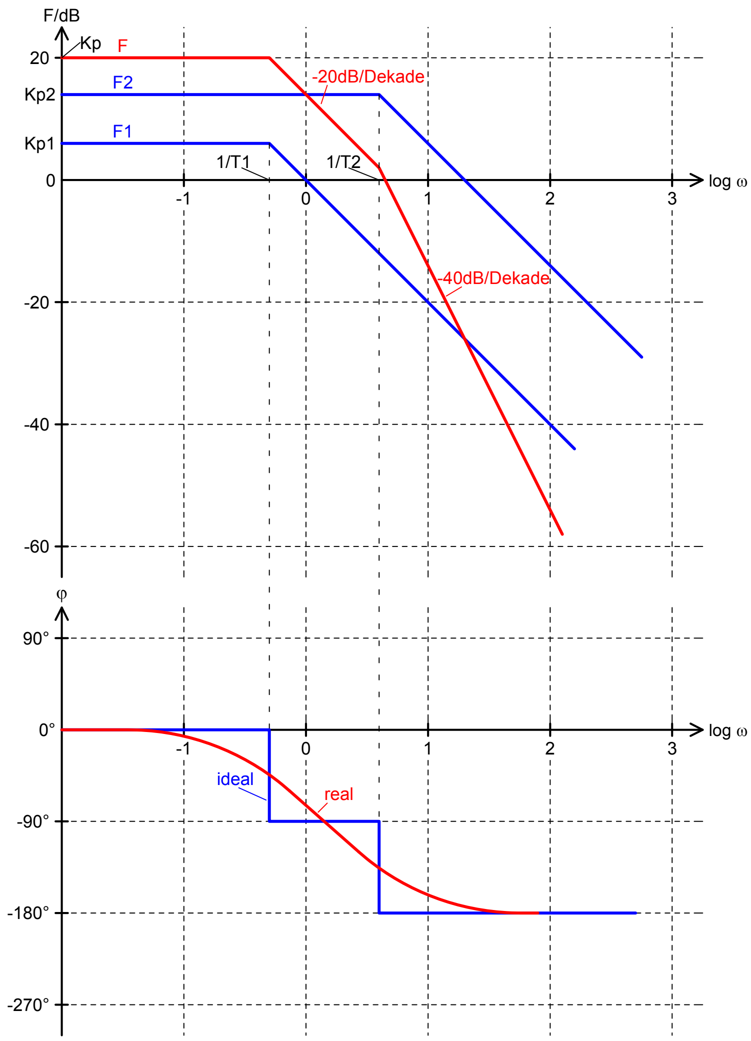
K_{P1}=2; T1=2s; K_{P2}=5; T2=0,25s

Man zeichnet zuerst die Amplitudengänge der einzelnen P-T1-Glieder und bildet anschließend den gesamten Amplitudengang durch punktweise Addition.

$$K_{P1_{dB}} = 20 \cdot \log 2 \approx 6dB \qquad \log\frac{1}{T1} = \log 0{,}5 \approx -0{,}3$$

$$K_{P1_{dB}} = 20 \cdot \log 5 \approx 14dB \qquad \log\frac{1}{T2} = \log 4 \approx 0{,}6$$

Der gesamte Phasengang ergibt sich ebenfalls durch die Addition der Phasengänge der einzelnen P-T1-Glieder. Da jedes P-T1-Glied eine Phasenverschiebung von 0° bis -90° aufweist ist die gesamte Phasenverschiebung von 0° bei kleinen Frequenzen bis zu -180° bei hohen Frequenzen.



Der Amplitudengang des Bode-Diagramms lässt sich durch drei Geraden annähern (für T2 < T1):

- Für Frequenzen unterhalb von $\frac{1}{T1}$ durch eine Gerade im Abstand $K_{P_{dB}} = K_{P1_{dB}} + K_{P2_{dB}}$.
- Für Frequenzen von $\frac{1}{T1}$ bis $\frac{1}{T2}$ durch eine Gerade, welche mit 20dB/Dekade abfällt.
- Für Frequenzen oberhalb von $\frac{1}{T2}$ durch eine Gerade, welche mit 40dB/Dekade abfällt.

Der ideale Phasengang für Frequenzen unterhalb von $\frac{1}{T1}$ ist 0°, für Frequenzen von $\frac{1}{T1}$ bis $\frac{1}{T2}$ -90° und für Frequenzen oberhalb $\frac{1}{T2}$ -180°.

Übung 3.1:

a) Zeichnen Sie das Bode-Diagramm einer P-T2-Strecke!

   Werte: KP1=0,5; T1=1s; KP2=12; T2=20s

b) Bestimmen Sie die Kreisfrequenz, bei welcher die Verstärkung F=1 wird!