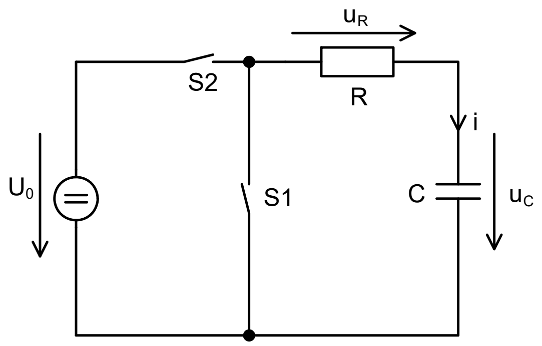
Für die Auf- und Entladung eines Kondensators über einen Widerstand ist folgendes Schaltbild gegeben:



Zuerst erfolgt die Berechnung von u_C für die Entladung des Kondensators.

Bei geschlossenem Schalter S1 ist

$u_R + u_C = 0$

mit

$u_R = R \cdot i$ und $i = C \cdot \frac{du_C}{dt}$

Durch Einsetzen erhält man

$R \cdot i + u_C = R \cdot C \cdot \frac{du_C}{dt} + u_C = 0$ → homogene Differentialgleichung 1.Ordnung

Die Berechnung erfolgt durch Trennung der Variablen. Nach Umstellung der Gleichung ist

$\frac{du_C}{dt} = -\frac{1}{R \cdot C} \cdot u_C$ bzw. $\frac{1}{u_C} \cdot du_C = -\frac{1}{R \cdot C} \cdot dt$

Durch Integration erhält man

$\int \frac{1}{u_C} \cdot du_C = \int -\frac{1}{R \cdot C} \cdot dt$

$\ln|u_C| + k1 = -\frac{t}{R \cdot C} + k2$ bzw. $\ln|u_C| = -\frac{t}{R \cdot C} + k3$ mit $k2 - k1 = k3 = \varepsilon\{Re\}$

Dann ist

$|u_c| = e^{-\frac{t}{R \cdot C} + k3} = e^{-\frac{t}{R \cdot C}} \cdot e^{k3} = k \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}}$ mit $e^{k3} = k = \varepsilon\{Re > 0\}$

$u_C = k \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}}$ mit $k = \varepsilon\{Re\}$ → Lösung der homogenen Differentialgleichung

Mit der Anfangsbedingung $u_{C(t=0)} = U_B$ ist $U_B = k \cdot e^0$ → $k = U_B$

Und schließlich

$u_C = U_B \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}}$

Für die Aufladung des Kondensators bei geschlossenem Schalter S2 gilt

$$u_R + u_C = U_0$$

Mit $u_R = R \cdot i$ und $i = C \cdot \frac{du_C}{dt} = C \cdot u_C'$ wird

$R \cdot C \cdot u_C' + u_C = U_0$ und $u_c' + \frac{1}{R \cdot C} \cdot u_c = \frac{1}{R \cdot C} \cdot U_0$ ①

Die Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ① ist die Summe der homogenen Lösung und einer partikulären Lösung.

$$u_c = u_{C_h} + u_{C_p}$$

Für die homogene Lösung wird die rechte Seite der Gleichung ① zu 0 gesetzt. Die Lösung entspricht dann der der Entladung des Kondensators:

$u_{c_h} = k \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}}$ ②

Partikuläre Lösung der DGL erfolgt durch Variation der Konstanten:

$u_{c_p} = k(t) \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}}$ ③ → gesucht wird k(t) zur partikulären Lösung!

Unter Anwendung der Produktregel[1] ist

$u_{C_p}' = k'(t) \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}} + k(t) \cdot \frac{-1}{R \cdot C} \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}} = k'(t) \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}} - k(t) \cdot \frac{1}{R \cdot C} \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}}$ ④

Gleichung ④und ③ in ① einfügen:

$$k'(t) \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}} - k(t) \cdot \frac{1}{R \cdot C} \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}} + \frac{1}{R \cdot C} \cdot k(t) \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}} = \frac{1}{R \cdot C} \cdot U_0$$

$$k'(t) \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}} = \frac{1}{R \cdot C} \cdot U_0$$

$$k'(t) = \frac{1}{R \cdot C} \cdot U_0 \cdot \frac{1}{e^{-\frac{t}{R \cdot C}}} = \frac{U_0}{R \cdot C} \cdot e^{\frac{t}{R \cdot C}}$$

$$k(t) = \int k'(t) = \int \frac{U_0}{R \cdot C} \cdot e^{\frac{t}{R \cdot C}} dt$$

$k(t) = \frac{U_0}{R \cdot C} \cdot R \cdot C \cdot e^{\frac{t}{R \cdot C}} + k = U_0 \cdot e^{\frac{t}{R \cdot C}} + k$ ⑤

Für <u>eine</u> mögliche Lösung kann die Integrationskonstante mit 0 angenommen werden.

Gleichung ⑤ in ③ einfügen

$$u_{c_p} = U_0 \cdot e^{\frac{t}{R \cdot C}} \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}} = U_0$$

$u_c = u_{c_p} + u_{c_h} = U_0 + k \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}}$ → Lösung der DGL

[1] Für $y = u \cdot v$ ist $y' = u' \cdot v + u \cdot v'$

Mit einer Anfangsbedingung $u_{c(t=0)} = U_B$ ist

$U_B = U_0 + k \;\rightarrow k = U_B - U_0$ und

$$u_c = U_0 + (U_B - U_0) \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}}$$

Ist der Kondensator zur Zeit t=0 ungeladen ist $U_B = 0$ und

$$u_c = U_0 - U_0 \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}} = U_0 \cdot (1 - e^{-\frac{t}{R \cdot C}})$$